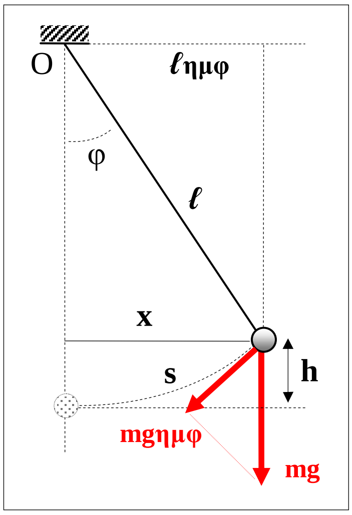
Πώς σχετίζεται η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης απλού εκκρεμούς με τη βαρυτική δυναμική ενέργεια;



Όπως γνωρίζουμε, η κίνηση του απλού εκκρεμούς για μικρές γωνίες εκτροπής (**φ<5°**) είναι κατά προσέγγιση αρμονική ταλάντωση, είτε γραμμική, είτε στροφική.

Πράγματι, για μικρές γωνίες η κίνηση είναι πρακτικά ευθύγραμμη, δηλαδή $\mathbf{x \approx s}$ οπότε:

$$\Sigma F_x = -\,mg\cdot\eta\mu\varphi \;\rightarrow\; \Sigma F_x = -\frac{mg}{\ell}\cdot x$$

επομένως, ΓΑΤ με: $\boxed{D = \frac{mg}{\ell}}$ και $\boxed{U = \frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2}$ **(1)**

Ή αν θέλουμε να τη δούμε σαν στροφική κίνηση, τότε **ημφ ≈ φ** οπότε:

$$\Sigma \tau_{(o)} = -\,mg\cdot\ell\eta\mu\varphi \;\rightarrow\; \Sigma \tau_{(o)} = -\,mg\ell\cdot\varphi$$

επομένως, ΣΑΤ με: $\boxed{D' = mg\ell}$ και $\boxed{U = \frac{1}{2}\cdot D'\cdot\varphi^2}$ **(2)**

Οι σχέσεις **(1)** και **(2)** που αναφέρονται στη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι πρακτικά ίδιες διότι $\mathbf{x \approx s = \ell\cdot\varphi}$ οπότε:

$$\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2 \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{mg}{\ell}\cdot(\ell\cdot\varphi)^2 = \frac{1}{2}\cdot mg\ell\cdot\varphi^2 = \frac{1}{2}\cdot D'\cdot\varphi^2$$

Η δυναμική αυτή ενέργεια δεν μπορεί να είναι άλλη παρά η πρόσθετη βαρυτική δυναμική ενέργεια, λόγω της ανύψωσης του σώματος καθώς απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας.

Πράγματι, σε απομάκρυνση **x** (ή σε γωνιακή εκτροπή **φ**) το σώμα έχει ανυψωθεί κατά ύψος **h**. Η δυναμική του ενέργεια ως προς τη θέση ισορροπίας είναι: $\boxed{U = mgh}$ **(3)**

Για το ύψος **h** ισχύει: $\mathbf{h = \ell - \ell\sigma\upsilon\nu\varphi = \ell\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}$.

Για το συνημίτονο τώρα, κατάλληλη προσέγγιση μικρής γωνίας είναι η:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \;\rightarrow\; 1 - \sigma\upsilon\nu\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}.$$

Έτσι, με αντικατάσταση παίρνουμε την ίδια όπως και πιο πάνω σχέση:

$$U = mgh = mg\ell\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) \approx \frac{1}{2}\cdot mg\ell\cdot\varphi^2$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι οι σχέσεις **(1)**, **(2)** και **(3)** αναφέρονται στο ίδιο ποσό ενέργειας:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2 \approx \frac{1}{2}\cdot D'\cdot\varphi^2 \approx mgh}$$

Όσο για την προσέγγιση του συνημιτόνου, αυτή προκύπτει ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = 1-2\cdot\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} = 1-2\cdot\left(\eta\mu\frac{\varphi}{2}\right)^2 \approx 1-2\cdot\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1-\frac{\varphi^2}{2}$$

Διονύσης Μητρόπουλος